Blaise Pascal
1623-1662

Filósofo, matemático y físico francés, considerado una de las mentes privilegiadas de la historia occidental. Formuló la teoría matemática de la probabilidad, que es de gran importancia en estadísticas actuariales, matemáticas y sociales.

Probabilidad

Generalidades

La probabilidad estudia experimentos en los que se pueden esperar varios resultados y no solamente uno. Los experimentos se pueden clasificar como **aleatorios** o **determinísticos**.

Un **experimento determinístico** es un ensayo en el que se sabe previamente el resultado.
Un **experimento aleatorio** es una acción cuyo resultado no se puede predecir con certeza.

Para que un experimento sea aleatorio debe reunir las siguientes tres condiciones:

- Antes de realizar el experimento se deben conocer todos los posibles resultados.
- No es posible predecir un resultado en particular.
- El experimento se puede ejecutar infinitas veces con las mismas condiciones.

El **espacio muestral** es el conjunto que reúne todos los posibles resultados que puede tener un experimento aleatorio. Se simboliza con *S*.

A cada uno de los resultados del espacio muestral se le denomina **punto muestral**.

Un **evento** es cualquier subconjunto del espacio muestral, cuyos elementos tienen una característica en común. Se simbolizan con letras mayúsculas.

Como los eventos son conjuntos se les puede aplicar las operaciones y propiedades de la teoría de conjuntos:

Evento simple o elemental: es aquel subconjunto que contiene un solo punto muestral.

Evento compuesto: es un subconjunto con más de un punto muestral.

Evento imposible: es un subconjunto de S que no contiene ningún punto muestral, es decir, un subconjunto vacío.

Evento seguro: subconjunto que contiene los mismos puntos del espacio muestral S.

Unión de eventos: si ocurren por lo menos uno o varios eventos a la vez. Así, si ocurre el evento E o el evento F, ocurre $E \cup F$.

Intersección de eventos: si los eventos ocurren al mismo tiempo, es decir, si ocurre el evento G y el evento H a la vez, ocurre $G \cap H$.

Eventos mutuamente excluyentes: son subconjuntos cuya intersección es vacía.

Por ejemplo, lanzar una moneda y un dado a la vez es un experimento aleatorio, su espacio muestral es:

$$S = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, S1, S2, S3, S4, S5, S6\}$$

el cual tiene seis puntos muestrales.

A partir del espacio muestral del experimento anterior, se puede observar el evento M que consiste en que el dado cae en un número impar, así:

$$M = \{C1, C3, C5, S1, S3, S5\}$$

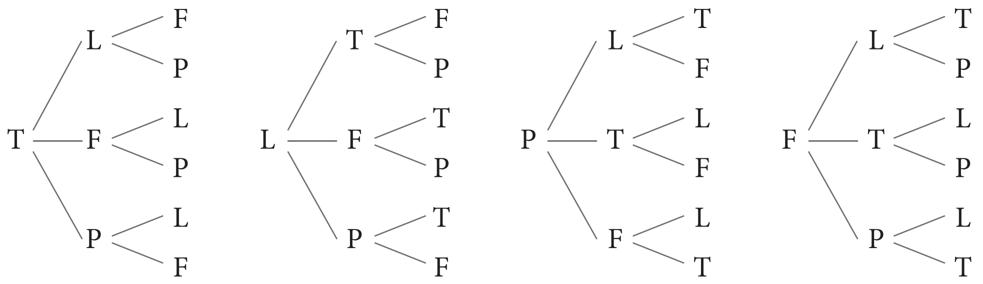
es un evento que además es subconjunto de S.

Ejemplo

Para la siguiente situación establecer el espacio muestral. Luego, determinar dos eventos y clasificarlos.

En un campeonato de fútbol clasifican 4 equipos a las finales: Tigres (T), Leopardos (L), Fabulosos (F) y Panteras (P). Se desea definir los tres primeros lugares.

El espacio muestral se puede determinar por medio de un diagrama de árbol así:



Se puede observar que cada camino corresponde a un punto muestral, es decir, el primer camino *LTF* es el primer punto muestral de *S*, luego hay 24 puntos muestrales.

S = {LTF, LTP, LFT, LFP, LPT, LPF, TLF, TLP, TFL, TFP, TPL, TPF, FLT, FLP, FTL, FTP, FPL, FPT, PLT, PLF, PTL, PTF, PFL, PFT}

Algunos eventos de este experimento son:

Evento *M*: que los Tigres y las Panteras no queden entre los tres primeros equipos
M = {} es un **evento imposible** porque clasifican 4 equipos y se seleccionan 3, alguno de los dos equipos tiene que ocupar uno de los 3 primeros lugares.

Evento *Q*: que los Fabulosos ganen el campeonato y los Tigres queden de segundo.
Q = {FTL, FTP} es un **evento compuesto** porque tiene dos puntos muestrales.

Actividades

Ejercita: 1-2 Razona: 3

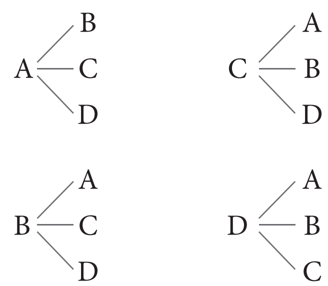
1 Determina si cada experimento cumple las condiciones para ser un experimento aleatorio. Justifica tu respuesta.

a. Lanzar tres monedas a la vez.
b. Identificar la hora que va a llover.
c. Determinar el promedio de las notas en un curso de inglés.
d. Predecir la hora en que sale el Sol.
e. Sacar dos cartas de una baraja de póquer.

2 Establece el espacio muestral de los siguientes experimentos.

a. Lanzar un dado y dos monedas al mismo tiempo.
b. Seleccionar tres colegios de cinco, para dotarlos de aulas virtuales.
c. Lanzar dos dados distintos al mismo tiempo.

3 Observa el siguiente diagrama de árbol:



a. Escribe un experimento que se ajuste al diagrama de árbol.
b. Determina el número de puntos muestrales del espacio muestral.
c. De acuerdo con el diagrama de árbol escribe un ejemplo de un evento simple y de un evento seguro.

Cálculo de probabilidades

Una forma de medir la **probabilidad** con la que se puede esperar que un evento suceda es asignar un número real entre 0 y 1. Si se está seguro de que el evento ocurra, se dice que su probabilidad es de 1 (o el 100%), pero si se está seguro de que el evento no ocurrirá, se dice que su probabilidad es 0 (o del 0%).

Existen dos procedimientos por medio de los cuales se pueden obtener estimaciones para la probabilidad de un evento: enfoque clásico y el enfoque como frecuencia relativa.

Enfoque clásico o ***a priori***. En un experimento aleatorio la probabilidad de que un evento E ocurra es:

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S}$$

Donde $\#E$ es la cantidad de puntos muestrales del evento E y $\#S$ es la cantidad de puntos en el espacio muestral S.

Por ejemplo, para calcular la probabilidad de sacar una balota con un número par diferente de 0, de una bolsa que contiene 10 balotas marcadas con los dígitos, se tiene que $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $E = \{2, 4, 6, 8\}$. Luego $\#S = 10$ y $\#E = 4$. Con lo cual la probabilidad de sacar un número par es $P(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

Es decir, hay un 40% de probabilidad de extraer una balota con número par.

Enfoque como frecuencia relativa o ***a posteriori***: La probabilidad de que ocurra un evento ***E***, después de muchas repeticiones del experimento, es la frecuencia relativa del evento f_r, es decir:

$$P(E) = \frac{f}{n} = fr$$

Donde f es la frecuencia absoluta del evento y n el total de datos.

Por ejemplo, en una fábrica de bombillos se desea determinar la probabilidad de obtener bombillos defectuosos en un proceso de fabricación. Para tal fin se tomaron varias muestras, desde 20 hasta 10.000 bombillos y se observó el número de unidades defectuosas en cada caso. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

No. bombillos muestreados *n*	No. bombillos defectuosos	*fr*
20	2	2/20 = 0,1
50	3	3/50 = 0,06
100	4	4/100 = 0,04
200	12	12/200 = 0,06
500	28	25/500 = 0,056
1.000	54	54/1.000 = 0,054
2.000	97	097/2.000 = 0,0485
5.000	244	244/5.000 = 0,0488
10.000	504	504/10.000 = 0,0504

A partir de los resultados del experimento se puede concluir que la probabilidad de obtener bombillos defectuosos es de 0,05 (5%). Nótese que a medida que se aumenta la cantidad de repeticiones del experimento la estimación de la probabilidad se hace más exacta.

Propiedades de la probabilidad de eventos

A partir de la definición de probabilidad se establece que:

- La probabilidad de un evento está en el intervalo cerrado [0, 1].
- La probabilidad de un evento seguro es 1.
- La probabilidad de un evento imposible es cero.
- Si los eventos A y B son mutuamente excluyentes, entonces,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
- Si los eventos A y B **no** son mutuamente excluyentes,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
- La probabilidad de que no suceda A es: $P'(A) = 1 - P(A)$

Ejemplos

1 En una bolsa hay 5 balotas numeradas del 5 al 9. Se extraen dos balotas, una detrás de otra sin devolverlas a la bolsa. Se anotan los resultados formando números de dos cifras. ¿Cuál es la probabilidad de formar un número múltiplo de 4 o formar un número mayor que 87?

El espacio muestral de este experimento está dado por:

$S = \{56, 57, 58, 59, 65, 67, 68, 69, 75, 76, 78, 79, 85, 86, 87, 89, 95, 96, 97, 98\}$,

y los eventos:

$E = \{x/x$ es múltiplo de $4\} = \{56, 68, 76, 96\}$ y

$F = \{x/x > 87\} = \{89, 95, 96, 97, 98\}$

no son mutuamente excluyentes puesto que $E \cap F = \{96\}$.

Luego $\#S = 20$, $\#E = 4$, $\#F = 5$, $\#(E \cap F) = 1$.

Si se utiliza el método clásico se tiene que:

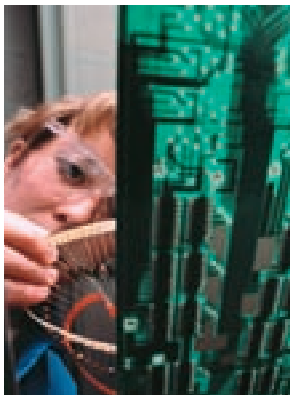
$$P(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{4}{20} = 0{,}2;\ P(F) = \frac{\#F}{\#S} = \frac{5}{20} = 0{,}25;$$

$$P(E \cap F) = \frac{\#(E \cap F)}{\#S} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

Por tanto la probabilidad del evento "formar un múltiplo de 4 o formar un número mayor que 6" está dada por:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0{,}2 + 0{,}25 - 0{,}05 = 0{,}4$$

2 Un circuito electrónico contiene dos componentes M y N. Cuando se conecta el circuito funciona si cualquiera de los dos componentes funciona. Se sabe que la probabilidad de que funcione M es $P(M) = 0{,}9$; la de N es $P(N) = 0{,}85$ y la de que el sistema funcione es de $P(M \cup N) = 0{,}92$. ¿Cuál es la probabilidad de que funcione M y N?



La probabilidad de que el sistema trabaje es igual a la probabilidad de la unión entre M y N. De esta manera:

$$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$$

Para encontrar la probabilidad de que funcionen los componentes M y N se encuentra la probabilidad de M intersectado N, luego:

$$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$$
$$0{,}92 = 0{,}9 + 0{,}85 - P(M \cap N)$$

Así $P(M \cap N) = 0{,}9 + 0{,}85 - 0{,}92 = 0{,}83$.

Por tanto la probabilidad de que funcione M y N es de 0,83, es decir, hay un 83% de probabilidad de que funcionen los dos componentes a la vez.

Actividades

Ejercita: 1-2-3 Razona: 4-5

1 Una carta se extrae aleatoriamente de una baraja de póker que contiene 52 cartas. Determina el espacio muestral para cada evento.

a. Evento A: Obtener un as.
b. Evento N: obtener una jota de trébol.
c. Evento P: obtener un trébol o un diamante.
d. Evento Q: obtener un corazón.
e. Evento R: obtener cualquier carta excepto un diamante.
f. Evento S: no obtener ni un tres ni un corazón.
g. Evento T: obtener una pica y un tres.

2 Se va a conformar un comité compuesto por tres personas. Los candidatos son: Juan, María, Pedro, Alicia y José.

a. Determina cuántos y cuáles comités diferentes es posible formar.
b. Encuentra la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.
   - El comité está formado sólo por hombres.
   - En el comité esta Pedro.
   - Alicia no está en el comité.
   - Pedro y Juan están en el comité.
   - Ni José ni María están en el comité.
   - El comité está formado solo por mujeres.
   - En el comité hay por lo menos una mujer.

3 Considera el siguiente experimento aleatorio. M: Se lanzan dos dados al mismo tiempo.

a. Determina el espacio muestral del experimento aleatorio.
b. Encuentra la probabilidad de los siguientes eventos:
   - Al sumar las caras de los dados el resultado es mayor que 5.
   - Obtener números iguales.
   - Por lo menos en un dado sale un número impar.
   - Obtener un múltiplo de 3 y un número mayor que 5.
   - Obtener un número primo o un número par.
   - Por lo menos en un dado sale un número par.

4 Para un experimento aleatorio se establecieron algunos eventos, cuyos elementos se muestran a continuación:

$E = \{55, 66, 77, 88, 99\}$
$F = \{00, 22, 33, 44, 55, 66\}$
$G = \{05, 15, 25, 35, 45, 55, 62, 75, 85, 95\}$
$H = \{10, 20, 30, 40\}$

a. Determina el espacio muestral si se sabe que: $E \cup F \cup G \cup H = S$
b. Encuentra la probabilidad de $E \cup F$.
c. Calcula la probabilidad de $F \cup H$.
d. Halla la probabilidad de $F \cup G \cup H$.
e. Determina la probabilidad de $G \cap H$.
f. Identifica cuáles pares de eventos son mutuamente excluyentes.

5 Se lanza 200 veces un dado y se obtiene la siguiente tabla:

Cara	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	24	34	36	32	36	38

a. Utiliza la frecuencia relativa para calcular la probabilidad de que al lanzar el dado se obtenga un número impar.
b. Determina la probabilidad de obtener un número menor que tres o un número mayor que 4.
c. Determina la probabilidad de obtener un múltiplo de tres que sea par.
d. Determina la probabilidad de obtener un número entre dos y cinco.
e. Determina la probabilidad de obtener un uno.
f. Determina la probabilidad de obtener un múltiplo de 5.

Soluciona problemas

6 Una máquina puede trabajar con dos sistemas distintos, uno manual y otro electrónico.

La probabilidad de que funcione manualmente es de 0,88, y la probabilidad de que funcione eléctricamente es de 0,85. Así mismo, la probabilidad de que funcione con ambos sistemas es de 0,68. Determina la probabilidad de funcionamiento de la máquina.